



الف. ثبوت

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in E \quad (x+y)+z &= ((x+y) \wedge z) \vee ((x+y)' \wedge z) \\ &= [(x \wedge y) \vee (x' \wedge y') \wedge z] \vee [(x \wedge y) \vee (x' \wedge y') \wedge z] \\ &= (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z) \end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن  $(x+y)+z = (x+y) \wedge z \vee (x+y)' \wedge z$  وهو المطلوب.

$$(x+y)+z = (z \wedge y \wedge x) \vee (z' \wedge y \wedge x') \vee (z \wedge y' \wedge x) \vee (z' \wedge y' \wedge x')$$

$$(x+y)+z = (z+y)+x = x+(z+y) = x+(y+z)$$

استنتجنا أن:



الحل:

لكن  $a^k \in H$  جاري في هذه المجموعة  $H \subseteq K_a$  زمرة جزئية من  $\langle a \rangle$  (أثبتنا سابقاً)

$$e \in H \cap K_a \Rightarrow H \cap K_a \neq \emptyset \Rightarrow K_a \subseteq H$$

لكن  $e \in H \Rightarrow x \in H \Leftrightarrow x \in K_a \Leftrightarrow x = a^k \Leftrightarrow x = a^0 = e$  (حيث  $x = a^k$  لأن  $x \in \langle a \rangle$ ) وبالتالي فإن:

$$a^k = a^n \Leftrightarrow a^{k-n} = e \Leftrightarrow a^{k-n} = a^0 \Leftrightarrow k-n = 0 \Leftrightarrow k = n$$

$K_a \subseteq H$  وفضلاً  $H \subseteq K_a \Leftrightarrow H = K_a$  وبالتالي فإن  $\langle a \rangle = K_a$  زمرة جزئية من  $\langle a \rangle$

تعريف:

تقول عن زمرة  $H$  في  $G$  إذا كان كل من أفعال الزمر الجزئية الدارة  $\langle a \rangle$  متشعبة  $\forall a \in G$

تمرين:

أثبت أن كل زمرة زمرة متشعبة ورية ولأن ذلك ليس صحيحاً في الحالة العامة

الحل:

نقول أن  $H$  زمرة متشعبة (الشعبان الدوري) ولأن  $a \in G$  فإن  $H$  زمرة الزمرة الجزئية الدارة المولدة بالعدد  $\langle a \rangle$  تكون متشعبة وذلك  $\forall a \in G$  ومنه يتبع  $H$  زمرة زمرة دارة

لكن: هذا يدل على أن ذلك ليس صحيحاً في الحالة العامة (حيث هذا يدل على أن ذلك لا يتحقق دائماً)

لكن  $(N)$  هي مجموعة الأعداد الطبيعية مع قانون التجميع  $+$  و  $H$  زمرة زمرة دورية لأنه صامت

$$\forall A \in G = (N) \Rightarrow \langle A \rangle = \{A\}$$

$$\langle A \rangle = \{A, A^2, A^3, \dots\}$$

$$A, \underbrace{A+A}_A, \underbrace{A+A+A}_A, \dots = 1A$$



أي أن  $\mathbb{R}$  هي زمرة دورية ولا تحتوي على عناصر غير متناهية

نريد:

أثبت أنه إذا كان  $\mathbb{R}$  زمرة دورية  $\Rightarrow$  ذات الدليل  $\mathbb{R}$  مماله  $\mathbb{R}$  تكون زمرة إذا وفقط إذا كانت  $\mathbb{R}$  حرة

الكل:

فرض أن  $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$  فإذن

$$k\mathbb{R} = \{a, a^2, \dots, a^{n+m-1}\} \quad k\mathbb{R} = \{a, a^2, \dots, a^{n+m-1}\}$$

$$k\mathbb{R} = \{a, a^2, \dots, a^{n+m-1}\} = \mathbb{R} \Rightarrow$$

وهذا يعني أن  $\mathbb{R}$  حرة

الآن:

افترض أن  $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$   $\Rightarrow$   $\mathbb{R}$  زمرة دورية  $\Rightarrow$   $\mathbb{R}$  حرة

أي أن  $\mathbb{R}$  حرة إذا كانت

$$a^{n+m-1} = a \Rightarrow a^{n+m-1} = a \Rightarrow a^{n+m-1} = a \Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{Z}$$

الدليل

استنتجنا الحاصل